Kansrekening 26-06-'02

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw vier dozen $B_1, \ldots, B_4$ met ballen erin. Gegeven is dat er $s > 2$ ballen per doos zijn, waarvan r_i, $(i = 1, \ldots, 4)$ in doos B_i rood zijn.

1. We voeren het volgende kansexperiment uit: je trekt één ball uit elke doos B_i (in totaal heb je dus 4 ballen getrokken).
(i.) Beschrijf de uitkomstenruimte van het experiment.
(ii.) Bereken de kans dat je precies twee rode ballen getrokken hebt uit die vier dozen, als $r_i = r$ voor alle $i = 1, \ldots, 4$.

We doen er nog een vijfde doos E bij. In E zitten vier briefjes genummerde van 1 t/m 4. Je trekt eerst een briefje uit E. Als het getrokken nummer i is dan ga je twee ballen trekken (zonder terugleggen) uit B_i.

2. Wat is de kans dat twee getrokken ballen rood zijn?

3. Laat $s = 10$ en $r_i = i + 2$. Gegeven is dat de eerste getrokken bal rood is. Wat is de kans dat de doos B_3 is gekozen?

II

We herinneren eraan dat de gammaverdeling $\gamma_{\alpha,\lambda}$, met parameters $\alpha > 0$ en $\lambda > 0$ de volgende dichtheid heeft:

$$\lambda^\alpha Y(x) \frac{x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \tag{1}$$

waar $Y = 1_{(0,+\infty)}$ de Heaviside functie is.

1. Zij Z een stochastische variabele met de gammaverdeling met dichtheid (1). Toon aan dat

$$E(Z) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad E(Z^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}, \quad \sigma^2(Z) = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{2}$$

Aanwijzing: merk op dat $x x^{\alpha-1} Y(x) e^{-\lambda x}$ en $x^2 x^{\alpha-1} Y(x) e^{-\lambda x}$ proportioneel zijn aan gammadichtheden, en gebruik de identiteit $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

2. Zij X een stochastische variabele met een normale verdeling met variantie σ^2, d.w.z. met de dichtheid

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{3}$$

Toon aan dat X^2 een gammaverdeling heeft. Aanwijzing: Het is bekend dat $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3. Laat X en Y onafhankelijke stochastische variabelen zijn gelijk verdeeld, met de dichtheid (3). Bepaal de verdeling van $X^2 + Y^2$. Aanwijzing: $\gamma_{\alpha,\lambda} * \gamma_{\beta,\lambda} = \gamma_{\alpha+\beta,\lambda}$.

4. Laat $\{X_n\}_{n \geq 1}$ een rij onafhankelijke gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn met de verdeling met dichtheid (3). Bepaal de verdeling van $S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$.

5. Bepaal de limiet

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\sigma^2}{\sqrt{n}} \leq x\right) \tag{4}$$

Aanwijzing: Bepaal de variantie van X_i^2 m.b.v. vraag 1.

[1] De onderdelen I en II zijn onafhankelijk.